problema de dos cuerpos cuando $N=2$. Referenciado a un sistema inercial $\mathcal{R}=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, sus posiciones vienen dadas por $\begin{cases} m_1\ddot{r}^1(t)=f^{12} \\ m_2\ddot{r}^2(t)=f^{21} \end{cases}$

Recordemos que $f^{12}=-f^{21}$ $\quad R(t)=\lambda r^1(t)+(1-\lambda)r^2(t)$, siendo $\lambda=\frac{m_1}{m_1+m_2}\in\mathbb{R}$

entonces se tiene $\begin{cases} r^1(t)=R(t)+\frac{m_2}{M}y(t) \\ r^2(t)=R(t)-\frac{m_1}{M}y(t) \end{cases}$ Por una parte, si $\hat{\mathcal{R}}_c(t)=\{C(t);\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ es el sistema baricéntrico, y si $\hat{r}^i(t)=r^i(t)-R(t)$

entonces:
$$\begin{cases} \hat{r}^1(t)(t)=\frac{m_2}{M}y(t) \\ \hat{r}^2(t)(t)=-\frac{m_1}{M}y(t) \end{cases}$$

Observación: Con respecto a la dinámica de $R(t)$ ya sabemos que el centro de masas describe un movimiento dado únicamente por la fuerza externa total $M\cdot\ddot{R}(t)=f^1+f^2$

Proposición: Supongamos que $\frac{f^1}{m_1}=\frac{f^2}{m_2}$. Entonces si se define la masa reducida por el escalar $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ se tiene que $\mu\cdot\ddot{y}(t)=f^{12}$

Teorema (de J. Koening)

1) La energía cinética total se puede escribir como
$$k_T(t)=\frac{1}{2}m_1\dot{\hat{r}}^1(t)\cdot\dot{\hat{r}}^1(t)+\frac{1}{2}m_2\dot{\hat{r}}^2(t)\cdot\dot{\hat{r}}^2(t)=\frac{1}{2}M\cdot\dot{\vec{R}}(t)\cdot\dot{\vec{R}}(t)+\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{y}}(t)\cdot\dot{\vec{y}}(t)$$

2) El vector momento angular se puede escribir como
$$L(t)=\sum_{i=1}^{2}\hat{r}^i(t)\times m_i\dot{\hat{r}}^i(t)=\vec{R}(t)\times M\cdot\dot{\vec{R}}(t)+y(t)\times\mu\cdot\dot{\vec{y}}(t)$$

3) Sin embargo, el vector momento lineal se puede escribir como
$$\vec{p}(t)=m_1\dot{\hat{r}}^1(t)+m_2\dot{\hat{r}}^2(t)=M\cdot\dot{\vec{R}}(t)$$

Demostración: Basta aplicar la descomposición
$$\begin{cases} \dot{\hat{r}}^1(t)=\dot{\vec{R}}(t)+\frac{m_2}{M}\dot{\vec{y}}(t) \\ \dot{\hat{r}}^2(t)=\dot{\vec{R}}(t)-\frac{m_1}{M}\dot{\vec{y}}(t) \end{cases}$$
que es fruto del tema. ※.

→ Sistema de N-partículas. Definiciones cinemáticas y resultados elementales.

Nos ocupamos de un sistema con N-partículas de masas m_i y vector de posición $\vec{r}^i(t)=\sum_{k=1}^{3}x_k^i(t)\vec{e}_k$ respecto de un sistema de referencia inercial $\mathcal{R}=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Para la partícula i-ésima, la segunda ley de Newton determina su momento mediante $m_i\ddot{\vec{r}}^i(t)=\vec{f}^i(t)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\vec{f}^{ij}(t)$, $i=1,\dots,N$ donde $\vec{f}^i(t)$ es la fuerza externa que actúa sobre esa partícula y $\vec{f}^{ij}$ es la fuerza de interacción que cada una de las otras partículas ejerce sobre ella. Por la Tercera Ley de Newton, $\vec{f}^{ij}$ tiene la misma la dirección que la posición relativa $\vec{r}^i-\vec{r}^j$ y $\vec{f}^{ij}=-\vec{f}^{ji}$. Por tanto, $\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\vec{f}^{ij}=\vec{0}$.

Se dice que el sistema de partículas es un sistema cerrado si $\vec{f}^i(t)=\vec{0}$ $\forall t,\forall i=1,\dots,N$. En particular, $\vec{f}^{ext}=\vec{0}$ siendo $\vec{f}^{ext}=\sum_{i=1}^{N}\vec{f}^i(t)$. El vector posición del sistema está definido como $\vec{r}(t)=(\vec{r}^1(t),\dots,\vec{r}^N(t))\in\mathbb{E}^{3N}$, $\forall t\geq t_0$.

Los problemas directos de la Mecánica Clásica de un sistema de partículas son:

i. La fuerza total $\vec{f}_T:\mathcal{D}(\vec{f}_T)\to\mathbb{E}^{3N}$ (con $\mathcal{D}(\vec{f}_T)$ un abierto de $\mathbb{E}^{3N}$), dada mediante $\vec{f}_T=(\vec{f}_T^1,\dots,\vec{f}_T^N)$ siendo $\vec{f}_T^i:=\vec{f}^i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\vec{f}^{ij}$, $i=1,\dots,N$

Suponemos que $\vec{f}\in C^1(\mathcal{D}(\vec{f}_T);\mathbb{E}^{3N})$. La segunda Ley de Newton sobre la partícula i-ésima se puede formular también como $m_i\ddot{\vec{r}}^i(t)=\vec{f}_T^i(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})$ en $\mathbb{E}^3$, $\forall i=1,\dots,N$.

ii. Los datos iniciales de cada una de las N partículas vienen dados mediante las condiciones $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0\in\mathbb{E}^{3N}$ y $\dot{\vec{r}}(t_0)=\dot{\vec{r}}_0\in\mathbb{E}^{3N}$

Se obtiene así el Problema de Cauchy:
$$(PC)_N\begin{cases} M\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{f}_T(t,\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t)) \\ \vec{r}(t_0)=\vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0)=\dot{\vec{r}}_0 \end{cases}\qquad \text{donde } M\in\mathcal{M}_{3N\times 3N},\ M=\begin{bmatrix} m_1I & & \\ & m_2I & \\ & & \ddots \\ & & & m_NI \end{bmatrix}$$

En el caso de una sola partícula, los problemas inversos de la Mecánica Clásica de un sistema de partículas son aquellos en los que se trata de hallar alguno de los datos de manera que la solución $\vec{r}(t)$ del $(PC)_N$ correspondiente verifique una cierta propiedad adicional deseada.

El vector momento lineal total se define mediante $\vec{p}(t):=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}^i(t)=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}^i(t)\in\mathbb{E}^3$.

El vector momento angular total es el dado mediante $\vec{L}(t):=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}^i(t)=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}^i(t)\times\vec{p}^i(t)\in\mathbb{E}^3$.

La masa total del sistema es el escalar $M:=\sum_{i=1}^{N}m_i$.

El centro de masas se define mediante el punto $C(t)$ de $\mathbb{A}^3$ tal que su vector de posición respecto de $\mathcal{R}=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, $\vec{R}(t):=\overrightarrow{OC(t)}$ viene dado por $\vec{R}(t):=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}^i(t)}{M}$, en $\mathbb{E}^3$.

El sistema de referencia baricéntrico asociado a $\mathcal{R}$, es el dado por $\hat{\mathcal{R}}_c(t)=\{C(t);\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ para cada partícula define un nuevo vector de posición relativa dada por $\hat{\vec{r}}^i(t):=\vec{r}^i(t)-\vec{R}(t)$

Lema: El centro de masas de los vectores de posiciones relativas respecto de $\hat{\mathcal{R}}_c(t)$ tiene de vector de posición relativa respecto de $\hat{\mathcal{R}}_c(t)$ el vector nulo.

Demostración: Basta advertir que $\sum_{i=1}^{N}m_i\hat{\vec{r}}^i(t)=\sum_{i=1}^{N}m_i(\vec{r}^i(t)-\vec{R}(t))=0$.

Proposición: 1. La razón de cambio del momento lineal total viene dada por la suma de las fuerzas externas. $\dot{\vec{p}}(t)=M\ddot{\vec{R}}(t)=\vec{f}^{ext}(t)$, con $\vec{f}^{ext}(t):=\sum_{i=1}^{N}\vec{f}^i(t)$.

2. El vector momento angular total cumple que $\dot{\vec{L}}(t)=\vec{\tau}_c(t)+\vec{L}_c(t)$, donde $\vec{L}_c$ es el momento angular del centro de masas, y $\vec{\tau}_c$ es del sistema respecto de $\hat{\mathcal{R}}_c(t)$. Además, $\vec{M}^{ext}=\vec{M}_c^{ext}+\vec{M}_c^{ext}$, siendo $\vec{M}_c^{ext}:=\vec{R}(t)\times\vec{f}^{ext}$ y $\vec{M}_c^{ext}:=\sum_{i=1}^{N}\hat{\vec{r}}^i(t)\times\vec{f}^i(t)$, ambos en $\mathbb{E}^3$.

Corolario: En un sistema cerrado el centro de masas se mueve rectilíneo y uniformemente respecto del sistema de referencia inercial $\mathcal{R}$. En particular $\hat{\mathcal{R}}_c(t)$ es también un sistema de referencia inercial.

→ Tercera ley de Kepler

Sea un campo de fuerzas conservativo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y atractivo es decir $\vec{f}(\vec{r})=\frac{k}{r^3}\vec{r}$ con $k<0$. Supongamos que $E_0\in\left[\frac{mk}{2L_0^2},0\right)$. Entonces, el cuadrado del periodo de revolución T es proporcional al cubo del semieje mayor a de las elipses resultantes, es decir $T^2=\mu a^3$ para una cierta constante μ independiente de las datos iniciales y por tanto de L_0 y E_0.

↳ Demostración:

Sea T el periodo. El área de la elipse πab (con b el semieje menor) ha de coincidir con la obtenida por la fórmula de la velocidad del área barrida $A(T)=\frac{L_0T}{2m}$.

Por el T.º de Pitágoras se tiene que $b^2=a^2(1-\varepsilon^2)$, y así sustituyendo las expresiones $\varepsilon=1+\frac{2E_0L_0^2}{mk^2}$ y $a=\left|\frac{k}{2E_0}\right|$ concluimos que: $b^2=\frac{L_0^2}{2m(-E_0)}$

Por tanto,
$$T=\frac{2mA(T)}{L_0}=\frac{2\pi mab}{L_0}$$

y así, como $T^2=4\pi^2a^2b^2\frac{m^2}{L_0^2}$

llegamos a (*) con $\mu=\frac{4\pi m^2}{(-k)}$

→ Campos centrales conservativos: caracterización y propiedades

Un campo de fuerzas $\vec{f}:\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}\to\mathbb{R}^3$ se denomina un "campo o fuerza central" si $\vec{f}(\vec{r})$ tiene la misma dirección que $\vec{r}$ para todo $\vec{r}\in\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}$; es decir, si existe $F:\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}\to\mathbb{R}$ tal que $\vec{f}=\vec{r}(\vec{r})=F(\vec{r})\vec{r}$ para todo $\vec{r}\in\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}$.

El dominio de definición $\mathcal{D}(\vec{f})$ es $\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}$. En el campo gravitatorio y en electrostática, $\vec{f}$ es de la forma $\vec{f}=\vec{f}(\vec{r})=\frac{k}{r^3}\vec{r}$ con $k\in\mathbb{R}$ por lo que $\vec{f}$ tiene una singularidad si $\vec{r}=\vec{0}$. Suponemos que $\vec{f}=\vec{f}(\vec{r})$ es la C^1 función localmente Lipschiciana sobre $\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}$. Esto garantiza la existencia y unicidad de solución local $\vec{r}(t)$ del problema de Cauchy:
$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{f}(\vec{r}(t)) \\ \vec{r}(t_0)=\vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0)=\dot{\vec{r}}_0 \end{cases}$$

→ Conservación del momento angular. Leyes de las áreas de Kepler.

T.º: Sea $\vec{f}=\vec{f}(\vec{r})$ un campo central de fuerzas y sea $\vec{L}(t)=\vec{r}(t)\times m\dot{\vec{r}}(t)$ el vector momento angular de una partícula de masa m de trayectoria $\vec{r}(t)$. Entonces $\vec{L}(t)$ es un vector constante en el tiempo.

↳ Demostración: Basta ya que $\dot{\vec{L}}(t)=\vec{r}(t)\times\vec{F}(\vec{r}(t))\vec{r}(t)=\vec{0}$.

Corolario: Los movimientos originados por un campo central se producen en el plano que contiene al origen, a la posición inicial $\vec{r}(t_0)$ y a ortogonal al vector $\vec{L}(t_0)$ supuesto que $\vec{L}(t_0)\neq\vec{0}$. Si $\vec{L}(t_0)=\vec{0}$, el movimiento se realiza en la recta que contiene al origen y a la posición inicial $\vec{r}(t_0)$. En ambos casos se tiene que $\vec{r}(t)$ está definida en todo $[t_0,\infty)$, es decir, $T^*=\infty$.

Proposición: Supongamos que $\vec{L}(t_0)\neq\vec{0}$. Si se define $L_0:=\|\vec{L}(t_0)\|$, entonces $L_0=mr^2(t)\dot{\theta}(t)$

T.º (2.ª Ley de Kepler): Las áreas, $A(T)$, de las regiones barridas por el extremo del vector de posición $\vec{r}(t)$ en periodos de igual duración, $[\tau,\tau+T]$, son las mismas y por tanto mag. del momento angular $\vec{L}$ de hecho se tiene la fórmula $\frac{dA}{dT}(T)=\frac{L_0}{2m}$

Lema: Supongamos que $\dot{\theta}(t)>0$. Sea $A(T)$ el área de la región barrida por el extremo del vector de posición $\vec{r}(t)$, cuando t varía en el intervalo $[\tau,\tau+T]$, supuesto que $\vec{r}(t)$ es una función de clase $C^1(\mathbb{R})$ y que $\dot{\theta}(t)>0$ para todo $t\in[\tau,\tau+T]$. Entonces, $\frac{dA}{dT}(t)=\frac{1}{2}r^2(t)\dot{\theta}(t)$

Del lema y la conservación del momento angular se concluye la fórmula $\frac{dA}{dT}(t)=\frac{L_0}{2m}$ (con T reemplazado por t). Integrando y aplicando la definición: $A(T)=A(\tau+T)-A(\tau)=\frac{L_0T}{2m}$

→ Campos centrales conservativos

T.º: Sea $\vec{f}=\vec{f}(\vec{r})$ un campo conservativo de potencial V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\vec{f}$ es un campo central, b) $V(\vec{r})$ no depende más de r (módulo de $\vec{r}$), es decir, existe $\mathcal{V}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ tal que $V(\vec{r})=\mathcal{V}(r)$, $\forall\vec{r}\in\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}$, c) $\vec{f}(\vec{r})$ no depende más del módulo de $\vec{r}$, es decir, existe $h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ tal que $\vec{f}=\vec{f}(\vec{r})=h(r)\vec{r}$ $\forall\vec{r}\in\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\}$.

Además, salvo una constante que aquí tomaremos nula, $\mathcal{V}(r)=-\int_r^r h(s)ds$, $\forall r\in(0,\infty)$

↳ Demostración: a)⇒b): Basta ver que la función V es constante sobre cada superficie esférica $S_r:=\{\vec{r}\in\mathbb{R}^3:\|\vec{r}\|=r\}$, o que la derivada de V vale cero. Como Γ inmersa en una superficie esférica orientada S_r, es nula. Sea $\|\Gamma(\tau)\|=r$, $\forall\tau\in I$, siendo I un intervalo abierto real. Entonces utilizando a), $\frac{d}{d\tau}(V\circ\Gamma(\tau))=\text{grad}V(\Gamma(\tau))\cdot\frac{d\Gamma}{d\tau}(\tau)=-\vec{f}(\Gamma(\tau))\cdot\frac{d\Gamma}{d\tau}(\tau)$
$$=-F(\Gamma(\tau))\Gamma(\tau)\cdot\frac{d\Gamma}{d\tau}(\tau)=-\frac{F(\Gamma(\tau))}{2}\frac{d}{d\tau}\|\Gamma(\tau)\|^2=0.$$

b)⇒c) Como $\vec{f}=\vec{f}(\vec{r})=-\text{grad}V(\vec{r})$, por b) $-\text{grad}V(\vec{r})=-\frac{\mathcal{V}'(r)}{r}\vec{r}$; por lo que basta def. $h(r)=\frac{-\mathcal{V}'(r)}{r}$

c)⇒a) es cona.

→ Criterio de existencia de soluciones periódicas para el problema de (CN).

Teorema: Consideremos el Problema de Cauchy $\begin{cases} m\ddot{\vec{r}}(t)=h(r(t))\vec{r}(t) \\ \vec{r}(t_0)=\vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0)=\dot{\vec{r}}_0 \end{cases}$

y sea W el potencial efectivo asociado a h y a $\vec{L}_0=\vec{r}_0\times m\dot{\vec{r}}_0$. Supongamos que $W(r)>-C$, para alguna $C>0$. Sea $E_0:=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_0\cdot\dot{\vec{r}}_0+\mathcal{V}(r_0)$. Entonces el movimiento plano $\vec{r}(t)$ es periódico si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:

1. Existen dos raíces positivas y consecutivas r_-,r_+ de la ecuación $W(r)=E_0$ tales que $r_0\in[r_-,r_+]$ con $r_0:=\|\vec{r}_0\|$
2. $W(r_-)<0$, $W(r_+)>0$.
3. $L_0>0$ y la integral impropia $\Lambda(h,m,L_0,E_0):=\frac{L_0}{\pi\sqrt{2m}}\int_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{r^2\sqrt{E_0-W(r)}}$ es un nº racional.

Además, si se cumplen las 3 condiciones y si nº $\Lambda(h,m,L_0,E_0)$ es de la forma p/q con p y q naturales y primos entre sí, entonces el periodo viene dado por
$$T=q\sqrt{2m}\int_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{\sqrt{E_0-W(r)}}$$

↳ Demostración:

Si no se cumple 1) ó 2), $\vec{r}(t)$ no es una función periódica y por tanto tampoco la puede ser $\vec{r}(t)$. Supongamos que se verifican 1) y 2). Si $L_0=0$, el movimiento es unidireccional y, por tanto, al ser cerrado, $r(t)$ no puede ser una función periódica. Supongamos que $L_0>0$, de $\frac{1}{2}m\dot{r}^2(t)+W(r(t))=E_0$ deducimos que $\dot{r}(t)=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_0-W(r(t)))}$, según que $\dot{r}$ varíe en intervalos en los que $\dot{r}(t)>0$ o $\dot{r}(t)<0$. Sean t_-,t_+ t_0 los instantes consecutivos en los que $r(t_-)=r_-$ y $r(t_+)=r_+$ y supongamos que $t_-<t_+$. Se tiene que $t_+-t_-=\frac{\sqrt{2m}}{2}\int_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{\sqrt{E_0-W(r)}}$. La misma fórmula es válida si $t_->t_+$ ya que entonces $\dot{r}(t)<0$. La anterior integral impropia, es convergente y el periodo de $r(t)$ es $T=2(t_+-t_-)$

El ángulo $\beta:=|\theta(t_+)-\theta(t_-)|$, generado entre los radio vectores asociados $\vec{r}(t_\pm)$, viene dado por la expresión $\beta=\frac{L_0}{\sqrt{2m}}\int_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{r^2\sqrt{E_0-W(r)}}$ (*) como la aplicación $t\to\theta(t)$ es invertible podemos generar la función $\vec{r}(\theta)=r(\vec{r}(\theta))$ donde $\vec{r}(\theta)$ es la función inversa de $\theta(t)$. Supongamos que $\dot{\theta}(t)>0$, se tiene que $\dot{r}(t)=\frac{d}{dt}(r(\vec{r}(\theta(t))))=\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta(t))\dot{\theta}(t)=\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta(t))\frac{L_0}{m\vec{r}(\theta(t))^2}$, y, por tanto, $\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta)=\frac{1}{L_0}\sqrt{2m}\,\vec{r}(\theta)^2\sqrt{E_0-W(\vec{r}(\theta))}$ según que θ varíe en intervalos en los que $\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta)>0$ ó $\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta)<0$.

Por ser una ecuación de variables separables, $\theta-\theta_0=\frac{1}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{\vec{r}(\theta)}\frac{dr}{r^2\sqrt{E_0-W(r)}}$. Integrando entre $\theta(t_-)$ y $\theta(t_+)$ se obtiene (*)

Por la definición de Λ, se tiene que $\beta\pi=\Lambda(h,m,L_0,E_0)$ es un número racional de la forma p/q con $p,q\in\mathbb{N}$ y primos entre sí, entonces $q\beta=p\pi$, es decir, después de $2q$ iteraciones (u oscilaciones de $r(t)$ entre r_- y r_+), el vector de posición $\vec{r}(t)$ habrá dado exactamente p vueltas y $\vec{r}^2(t_0+2q|t_+-t_-|)=\vec{r}(t_0+2q|t_+-t_-|)$ pues los dos vectores tienen el mismo módulo y ángulos 2π-conguentes. Por tanto, el movimiento es periódico de periodo $T=2q|t_+-t_-|=2q\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{\sqrt{E_0-W(r)}}$

Por último, si $\Lambda(h,m,L_0,E_0)$ fuese un nº irracional, ninguna iteración del proceso conducirá a la posición ocupada inicialmente y el movimiento no podría ser nunca periódico.